下書き

XXXXXXXXXXXX 書き始めは故障率が最も重要な指標だと思っていたが、寧ろ生存関数の方が重要かもしれない。XXXXXXXXXXX

連続分布における故障率（危険率）

以下、断りがない限り変数は連続であるとする。故障による機械の寿命を T として、時刻 t までに寿命を迎えていないことを前提とする。t 以上、$t+\Delta t$ 未満の時間幅で寿命を迎える条件付き確率を

$$P(t \leq T < t+\Delta t | t \leq T)$$

とする。更にこの時刻 t で故障する単位時間当たりの率を $r(t)$ とする。これは通常の確率と異なり、時間当たりの確率である。そのため一より大きくなることがある。これと時間幅 Δt との積を用いて先程の確率を

$$P(t \leq T < t+\Delta t | t \leq T) \simeq r(t)\Delta t$$

と近似できる。この式を書き換えると

$$r(t) \simeq \frac{P(t \leq T < t+\Delta t | t \leq T)}{\Delta t}$$

となる。この $r(t)$ を改めて次の極限で定義する。

$$r(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T < t+\Delta t | t \leq T)}{\Delta t}$$

これを故障率という。他にも危険率とも死力ともハザード率ともいう。

定義式の分子は不等号の重複から次のように計算できる。

$$\begin{aligned} P(t \leq T < t+\Delta t | t \leq T) &= \frac{P(t \leq T < t+\Delta t \cap t \leq T)}{P(t \leq T)} \\ &= \frac{P(t \leq T < t+\Delta t)}{P(t \leq T)} \end{aligned}$$

さらにこの分子は

$$\begin{aligned} P(t \leq T < t+\Delta t) &= 1 - P(T < t) - P(t+\Delta t \leq T) \\ &= P(t \leq T) - P(t+\Delta t \leq T) \\ &= S(t) - S(t+\Delta t) \end{aligned}$$

と計算できる。この $S(x)$ は生存関数と呼ばれ、時刻 x まで寿命を迎えていない確率とする。時刻 t に故障している確率密度関数を $f(t)$ とすると、その累積分布は時刻 t までに故障している累積分布関数 $F(t)$ となり、生存関数は一からこれで引いた $S(t) := 1 - F(t)$ で定義される。これを t で微分すると $\dot{S}(t) = -f(t)$ となる。以上を踏まえて故障率の極限をとると

$$\begin{aligned} r(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T < t+\Delta t | t \leq T)}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{S(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t) - S(t+\Delta t)}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{S(t)} \left(-\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} \right) \\ &= \frac{f(t)}{1 - F(t)} \end{aligned}$$

を得る。或いは別の表現として

$$
\begin{aligned}
r(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | t \leq T)}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{S(t)} \left(-\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} \right) \\
&= -\frac{\mathrm{d}\log S(t)}{\mathrm{d}S(t)} \frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log S(t) \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log(1 - F(t))
\end{aligned}
$$

を得る。式

$$r(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log S(t)$$

を $S(t)$ の微分方程式とし、解を求めると

$$S(t) = \exp\left(-\int r(t)\mathrm{d}t \right)$$

となる。定義 $S(t) := 1 - F(t)$ より

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\int r(t)\mathrm{d}t \right)$$

であり、この微分より

$$f(t) = r(t) \exp\left(-\int r(t)\mathrm{d}t \right) = r(t)S(t)$$

を得る。ここで先程の生存関数の微分方程式の別の表現

$$r(t) = \frac{1}{S(t)} \left(-\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} \right)$$

を代入すると

$$f(t) = \frac{1}{S(t)} \left(-\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} \right) S(t) = -\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}$$

となる。これを積分すると

$$S(t) = -\int f(t)\mathrm{d}t$$

となる。期待値の定義は

$$E[T] = \int t f(t)\mathrm{d}t$$

である。上記の生存関数との関係式 $f(t) = -DS(t)$ より、部分積分を用いることで

$$
\begin{aligned}
E[T] &= \int t \left(-\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t \\
&= -\left[tS(t) \right] + \int S(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

となる。特に境界に於いて $tS(t)$ が零になるならば

$$E[T] = \int S(t)\mathrm{d}t$$

となる。また二乗の期待値は

$$E[T^2] = -\left[t^2 S(t)\right] + 2\int tS(t)\mathrm{d}t$$

であり、境界に於いて $t^2 S(t)$ が零になるならば

$$E[T^2] = 2\int tS(t)\mathrm{d}t$$

となる。このため分散は、境界が無視できるのであれば

$$V(T) = 2\int tS(t)\mathrm{d}t - \left(\int S(t)\mathrm{d}t\right)^2$$

である。

指数分布

微分方程式

$$r(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log S(t)$$

について $r(t)$ に対応する値によりいくつかの確率分布を得ることができる。まず定数 $r(t) = a$ を代入するとどのようになるかをみる。既に解いた解に代入すると

$$\begin{aligned} S(t) &= \exp\left(-\int a\mathrm{d}t\right) \\ &= \exp\left(-at + c\right) \end{aligned}$$

となる。c は積分定数である。これを微分すると

$$f(t) = a\exp\left(-at + c\right)$$

となる。

初期条件として $t = 0$ では故障していないとする。これは数式で $S(0) = 1$ と書け、これを $S(t)$ に代入すると

$$\begin{aligned} S(0) &= \exp\left(c\right) \\ c &= 0 \end{aligned}$$

を得る。また慣例に合わせて $a = \lambda$ とすると

$$f(t) = \lambda\exp\left(-\lambda t\right)$$

となる。これは指数分布の確率密度関数である。このことから指数分布の生存関数は

$$S(t) = \exp\left(-\lambda t\right)$$

である。期待値は定義より

$$\begin{aligned} E[T] &= \int_0^\infty tf(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \lambda t\exp\left(-\lambda t\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty u\exp\left(-u\right)\frac{\mathrm{d}u}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda}\Gamma(2) \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

となる。生存関数の公式を使うと

$$\begin{aligned} E[T] &= \int_0^\infty tf(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty S(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \exp\left(-\lambda t\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

である。このように一部の確率分布では生存関数経由で計算すると期待値が少ない計算で求まる。二乗の期待値は

$$
\begin{aligned}
E[T^2] &= \int_0^\infty t^2 f(t) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \lambda t^2 \exp\left(-\lambda t\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{u^2}{\lambda} \exp\left(-u\right) \frac{\mathrm{d}u}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\Gamma(3) \\
&= \frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

であるため分散は

$$
V(T) = E[T^2] - \left(E[T]\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}
$$

である。

ガンマ分布

微分方程式を書き換える。微分作用素 D を用いると

$$
\begin{aligned}
r(t) &= \frac{1}{S(t))}\left(-\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}\right) \\
r(t)S(t) &= -DS(t) \\
(D + r(t))\,S(t) &= 0
\end{aligned}
$$

と書ける。この $r(t)$ に λ を代入すると

$$(D+\lambda)\,S(t) = 0$$

となる。これを解くと

$$S(t) = \exp\left(-\lambda t + c\right)$$

となる。これは初期条件として生存率は $t = 0$ で一であるとすると

$$S(t) = \exp\left(-\lambda t\right)$$

となる。これを微分すると上記の指数分布となる。この微分方程式は生存関数の減少率は一定で λ に比例すると解釈できる。指数分布は一回発生することを終了条件とした。この拡張といえるガンマ分布は複数回発生することを終了条件とする。先程の微分方程式の $(D + \lambda)$ を一回の発生の演算子と見做し、その拡張である複数の発生を $(D + \lambda)^k$ と考える。つまり

$$(D+\lambda)^k\,S(t) = 0$$

が複数回発生の微分方程式であると考える。この場合においては k 回発生することで生存が失われるとする。これを解いて確かめてみる。まず $k = 2$ から調べる。

$$(D+\lambda)^2\,S(t) = 0$$

演算子と生存関数との間に $1 = \exp(-\lambda t)\exp(\lambda t)$ が掛かっているとみなす。するとこの微分方程式の左辺は

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (D+\lambda)^2\,S(t) \\
&= (D+\lambda)^2 \exp(-\lambda t)\exp(\lambda t)S(t) \\
&= (D+\lambda)\,(D+\lambda)\left\{\exp(-\lambda t)\left(\exp(\lambda t)S(t)\right)\right\} \\
&= (D+\lambda)\left\{-\lambda\exp(-\lambda t)\left(\exp(\lambda t)S(t)\right) + \exp(-\lambda t)D\left(\exp(\lambda t)S(t)\right) + \lambda\exp(-\lambda t)\left(\exp(\lambda t)S(t)\right)\right\} \\
&= (D+\lambda)\left\{\exp(-\lambda t)D\left(\exp(\lambda t)S(t)\right)\right\} \\
&= \left\{-\lambda\exp(-\lambda t)D\left(\exp(\lambda t)S(t)\right) + \exp(-\lambda t)D^2\left(\exp(\lambda t)S(t)\right) + \lambda\exp(-\lambda t)D\left(\exp(\lambda t)S(t)\right)\right\} \\
&= \exp(-\lambda t)D^2\left(\exp(\lambda t)S(t)\right)
\end{aligned}
$$

と書き換えることができる。元の微分方程式にこの結果を代入し、計算すると解を得る。

$$
\begin{aligned}
\exp(-\lambda t)D^2\left(\exp(\lambda t)S(t)\right) &= 0 \\
D^2\left(\exp(\lambda t)S(t)\right) &= 0 \\
D\left(\exp(\lambda t)S(t)\right) &= c_1 \\
\left(\exp(\lambda t)S(t)\right) &= c_1 t + c_2 \\
S(t) &= \exp\left(-\lambda t\right)\left(c_1 t + c_2\right)
\end{aligned}
$$

積分定数を求める。$k=1$ の場合と同じく $S(0)=1$ とすると $c_2=1$ である。またこの生存関数での故障率は

$$\begin{aligned} r(t) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log S(t) \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log\left((c_1 t+1)\exp\left(-\lambda t\right)\right) \\ &= -\frac{c_1}{c_1 t+1}+\lambda \end{aligned}$$

であり、出荷段階では故障していないという初期条件 $r(0)=0$ を加えると

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{c_1}{0+1}+\lambda \\ c_1 &= \lambda \end{aligned}$$

を得る。以上より

$$S(t)=\exp\left(-\lambda t\right)\left(1+\lambda t\right)$$

である。

$k=3$ についても微分方程式を同様に変形することで

$$\begin{aligned} \left(D+\lambda\right)^3 S(t) &= 0 \\ \exp(-\lambda t)D^3\left(\exp(\lambda t)S(t)\right) &= 0 \\ S(t) &= \exp\left(-\lambda t\right)\left(c_1 t^2+c_2 t+c_3\right) \end{aligned}$$

を得る。このときの故障率は

$$r(t)=\frac{c_1\lambda t^2+(\lambda^2-2c_1)t}{c_1 t^2+\lambda t+c_3}$$

である。$k=2$ と同様に計算すると $S(0)=1$ より $c_3=1$ であり、$r(0)=0$ より $c_2=\lambda$ である。ここで生存率 $S(t)$ が $t=0$ 付近で充分になめらかであり、その導関数の値は $t=0$ で常に零と仮定する。つまり $S^{(m)}(t)=0$ と仮定する。一階微分の式は

$$\dot{S}(t)=\left\{-\lambda c_1 t^2+(2c_1-\lambda^2)t\right\}\exp\left(-\lambda t\right)$$

より明らかである。次に二階の式については

$$\ddot{S}(t)=\left\{\lambda^2 ct^2(-4\lambda c_1+\lambda^3)t+(2c_1-\lambda^2)\right\}\exp\left(-\lambda t\right)$$

となる。これが零であるのは

$$\begin{aligned} 0 &= 2c_1-\lambda^2 \\ c_1 &= \frac{\lambda^2}{2} \end{aligned}$$

のときである。このことから $k=3$ の生存関数は

$$S(t)=\exp\left(-\lambda t\right)\left(1+\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2}\right)$$

である。ここまでの結果から一般の場合は

$$S(t)=\exp\left(-\lambda t\right)\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

であると予想できる。この厳密な証明は省略し、次の直感的な説明をもって代わりとする。
k を無限とすると。このとき指数関数の級数展開

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = \exp(\lambda t)$$

より

$$\lim_{k\to\infty} S(t) = \exp(-\lambda t)\exp(\lambda t) = 1$$

となる。これは正しいだろう。なぜなら k 回発生するまでの時間を生存関数としたことを鑑みると、この場合は無限回発生するまでの時間は永遠に来ない。生存関数は確率の関数であるため妥当であろう。
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
別案

$$A_1 = \exp(\lambda t)S(t)$$

とする

$$A_2 = DA_1 = \exp(\lambda t)\exp(-\lambda t)S(t)$$

であることから

$$A_{k+1} = 0$$

と予想する。

$$\exp(-\lambda t)DA_k = 0$$

これを繰り返すと

$$A_1 = \frac{c_k}{k!}t^k + \frac{c_{k-1}}{(k-1)!}t^{k-1} + \cdots$$

となる。よって

$$S(t) = \exp(-\lambda t)\sum_{l=0}^{k-1}\frac{c_l}{l!}t^l$$

である。ここで定数が一定であり $c_l = a^l$ と仮定する。すると

$$S(t) = \exp(-\lambda t)\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(at)^l}{l!}$$

となる。ここで k を無限大にすると

$$\exp(-\lambda t)\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(at)^l}{l!} \to \exp(-\lambda t)\exp(at)$$

となる。事象が k 回発生することが生存の終了である。k を無限とすると終了条件に到達しえない。そのため生存関数 $S(t)$ は一であるはずである。そのため

$$1 = \exp(-\lambda t)\exp(at)$$

である。この式が成り立つのは $a=\lambda$ のときである。故に

$$S(t)=\exp(-\lambda t)\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^l}{l!}$$

である。
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
続いてはガンマ分布の確率密度関数を求める。既に求めた関係式 $f(t)=-\dot{S}(t)$ に上記の生存関数を代入すると

$$\begin{aligned}
f(t)&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t)\\
&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\exp(-\lambda t)\left(\frac{1}{0!}+\frac{\lambda t}{1!}+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!}+\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right)\right\}\\
&=\exp(-\lambda t)\left\{\lambda\left(\frac{1}{0!}+\frac{\lambda t}{1!}+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!}+\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right)-\lambda\left(0+\frac{1}{0!}+\frac{\lambda t}{1!}+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!}\right)\right\}\\
&=\exp(-\lambda t)\lambda\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\\
&=\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}t^{k-1}\exp(-\lambda t)
\end{aligned}$$

を得る。ガンマ分布の確率密度関数は覚えにくいが、生存関数は覚えやすい。生存関数の方を覚えておいて、こちらから求める方が間違いが少なくて済むだろう。

生存関数の対数は

$$\log S(t)=-\lambda t+\log\left\{1+\lambda t+\cdots+\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right\}$$

であり、これを微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log S(t)&=-\lambda+\frac{\mathrm{d}\left\{1+\lambda t+\cdots+\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right\}}{\mathrm{d}t}\frac{\log\left\{1+\lambda t+\cdots+\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right\}}{\left\{1+\lambda t+\cdots+\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right\}}\\
&=\frac{-\left\{\lambda+\lambda^2t+\cdots+\frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}\right\}+\left\{\lambda+\lambda^2t+\cdots+\frac{\lambda^{k-1}t^{k-2}}{(k-2)!}\right\}}{\left\{1+\lambda t+\cdots+\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right\}}\\
&=\frac{-\frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}}{\left\{1+\lambda t+\cdots+\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right\}}
\end{aligned}$$

となるため故障率は

$$r(t)=\frac{\frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}}{\left\{1+\lambda t+\cdots+\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right\}}$$

である。関係式 $f(t) = r(t)S(t)$ より

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}}{\left\{1 + \lambda t + \cdots + \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right\}} \exp(-\lambda t) \left\{1 + \lambda t + \cdots + \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right\} \\ &= \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} \exp(-\lambda t) \end{aligned}$$

となる。これは先程の結果と一致する。期待値を求める。公式より

$$\begin{aligned} E[T] &= -\left[tS(t)\right]_0^\infty + \int_0^\infty S(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \exp(-\lambda t) \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^j}{j!} \int_0^\infty \exp(-\lambda t)\, t^j \mathrm{d}t \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^j}{\Gamma(j-1)} \int_0^\infty \exp(-u) \left(\frac{u}{\lambda}\right)^j \frac{\mathrm{d}u}{\lambda} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^j}{\Gamma(j-1)} \frac{\Gamma(j-1)}{\lambda^{j+1}} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{k}{\lambda} \end{aligned}$$

となる。二乗の期待値は

$$\begin{aligned} E[T^2] &= -\left[t^2 S(t)\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty tS(t)\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^\infty \exp(-\lambda t) \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^j t^{j+1}}{j!} \mathrm{d}t \\ &= 2\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^j}{j!} \int_0^\infty \exp(-\lambda t)\, t^{j+1} \mathrm{d}t \\ &= 2\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^j}{\Gamma(j-1)} \int_0^\infty \exp(-u) \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{j+1} \frac{\mathrm{d}u}{\lambda} \\ &= 2\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^j}{\Gamma(j-1)} \frac{\Gamma(j)}{\lambda^{j+2}} \\ &= 2\sum_{j=0}^{k-1} \frac{j+1}{\lambda^2} \\ &= \frac{k^2+k}{\lambda^2} \end{aligned}$$

となる。そのため分散は

$$V(t) = E[T^2] - (E[T])^2 = \frac{k}{\lambda^2}$$

である。

ワイブル分布

故障率の微分方程式の $r(t)$ に ct^b を代入すると

$$ct^b = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log S(t)$$

となる。これを解く。d を積分定数とすると

$$\begin{aligned}-\frac{c}{b+1}t^{b+1} + d &= \log S(t) \\ \exp\left(-\frac{c}{b+1}t^{b+1} + d\right) &= S(t)\end{aligned}$$

となる。これまでと同様に $t = 0$ で $S(0) = 1$ とすると

$$S(t) = \exp\left(-\frac{c}{b+1}t^{b+1}\right)$$

となる。これを微分すると

$$\begin{aligned}f(t) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t) \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp\left(-\frac{c}{b+1}t^{b+1}\right) \\ &= ct^b\exp\left(-\frac{c}{b+1}t^{b+1}\right) \\ &= r(t)S(t)\end{aligned}$$

となる。これは統計検定の教科書にある形である。続いては QC 検定などで見られる形に変える。変数変換を用いる。便宜上、これまでの式を $f_T(t)$ と表すことにし、$t = g(x)$ と変換したとき

$$\int_{t_1}^{t_2} f_T(t)\mathrm{d}t = \int_{x1}^{x_2} f_X(x)\mathrm{d}x$$

が成り立つとする。この右辺は

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= \int_{g^{-1}(x_1)}^{g^{-1}(x_2)} f_X(x)\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} f_X(x)\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

と変形できるとき、この両辺から

$$f_T(t) = f_X(x)\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|$$

を得る。更に両辺を $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ で割り $x = g^{-1}(t)$ の関係を用いると

$$f_X(x) = \frac{f_T(t)}{\frac{\mathrm{d}g^{-1}}{\mathrm{d}t}(t)}$$

となる。ここで変換の関数 g の具体的な形として $g(x) = x/\eta$ を与えると、$x = g^{-1}(t) = \eta t$ となるため

$$\frac{\mathrm{d}g^{-1}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}(\eta t)}{\mathrm{d}t} = \eta$$

となり、この結果より

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{f_T(t)}{\frac{\mathrm{d}g^{-1}}{\mathrm{d}t}(t)} \\
&= \frac{c\left(\frac{x}{\eta}\right)^b \exp\left(-\frac{c}{b+1}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{b+1}\right)}{\eta} \\
&= \frac{c}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^b \exp\left(-\frac{c}{b+1}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{b+1}\right)
\end{aligned}
$$

となる。ここで $b+1=m,\ c=m$ とすると

$$
f_X(x) = \frac{m}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{m-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m\right)
$$

となる。他に $\eta = 1/e$ と置くと

$$
f_X(x) = em\left(ex\right)^{m-1}\exp\left(-(ex)^m\right)
$$

となり、$l = h(x) = ex$ より

$$
\int_{l_1}^{l_2} f_L(l)\mathrm{d}l = \int_{h(x_1)}^{h(x_2)} f_X(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}\mathrm{d}l
$$

と変換すると

$$
\begin{aligned}
f_L(l) &= f_X(h^{-1}(l))\frac{\mathrm{d}h^{-1}(l)}{\mathrm{d}l} \\
&= em\left(l\right)^{m-1}\exp\left(-(l)^m\right)\frac{1}{e} \\
&= ml^{m-1}\exp\left(-l^m\right)
\end{aligned}
$$

となる。累積分布関数は次のように求まる。$u^m = v$ と置くと $mu^{m-1}\mathrm{d}u = \mathrm{d}v$ となるため

$$
\begin{aligned}
F_L(l) &= \int_0^l f_L(u)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^l mu^{m-1}\exp\left(-u^m\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{l^m} \exp\left(-v\right)\mathrm{d}v \\
&= 1-\exp\left(-l^m\right) \\
&= 1-S_L(l)
\end{aligned}
$$

と計算できる。一番目の変換の式 $f_X(x)$ の累積分布関数は $(u/\eta)^m = v$ と置くと

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_0^x f_X(u)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^x \frac{m}{\eta}\left(\frac{u}{\eta}\right)^{m-1}\exp\left(-\left(\frac{u}{\eta}\right)^m\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{(x/\eta)^m} \exp\left(-v\right)\mathrm{d}v \\
&= 1-\exp\left(-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m\right) \\
&= 1-S_X(x)
\end{aligned}
$$

となる。
続いては期待値、分散を求める。先ず最初の式 $f_T(t)$ の期待値から求める。変数の定義域が零以上であることに注意しつつ求める。$cu^{b+1}/(b+1)=v$ と置くと

$$
\begin{aligned}
E_T[T] &= \int_0^\infty u f_T(u)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^\infty cu^{b+1}\exp\left(-\frac{c}{b+1}u^{b+1}\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^\infty (b+1)v\exp(-v)\left(\frac{b+1}{c}\right)^{\frac{1}{b+1}}\frac{1}{b+1}v^{\frac{1}{b+1}-1}\mathrm{d}v \\
&= \left(\frac{b+1}{c}\right)^{\frac{1}{b+1}}\int_0^\infty v^{\frac{1}{b+1}+1-1}\exp(-v)\,\mathrm{d}v \\
&= \left(\frac{b+1}{c}\right)^{\frac{1}{b+1}}\Gamma\left(\frac{1}{b+1}+1\right)
\end{aligned}
$$

となる。最後の式変形はガンマ関数を用いた。他についても同様に計算でき

$$
\begin{aligned}
E_X[X] &= \eta\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right) \\
E_L[L] &= \Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)
\end{aligned}
$$

となる。ワイブル分布の期待値は平均故障時間（MTTF）とも呼ばれる。別の方法として部分積分と生存関数とを用いる方法がある。確率密度関数と生存関数との関係から

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-S(t)) \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。また生存率は最終的に零に収束することを踏まえて期待値を計算すると

$$
\begin{aligned}
E[T] &= \int_0^\infty tf(t)\mathrm{d}t \\
&= [t(-S(t))]_0^\infty - \int_0^\infty (-S(t))\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty S(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

となる。この式に生存関数を代入し、上記の方法と同じ結果となることを確かめる。$cu^{b+1}/(b+1)=v$ を用

いると

$$
\begin{aligned}
E_T[T] &= \int_0^\infty S_T(u)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^\infty \exp\left(-\frac{c}{b+1}u^{b+1}\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^\infty \exp\left(-v\right)\left(\frac{b+1}{c}\right)^{\frac{1}{b+1}}\frac{1}{b+1}v^{\frac{1}{b+1}-1}\mathrm{d}v \\
&= \left(\frac{b+1}{c}\right)^{\frac{1}{b+1}}\frac{1}{b+1}\Gamma\left(\frac{1}{b+1}\right) \\
&= \left(\frac{b+1}{c}\right)^{\frac{1}{b+1}}\Gamma\left(\frac{1}{b+1}+1\right)
\end{aligned}
$$

となる。最後の式変形は

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{b+1}\Gamma\left(\frac{1}{b+1}\right) &= \frac{1}{b+1}\left(\frac{1}{b+1}-1\right)\left(\frac{1}{b+1}-2\right)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \\
&= \Gamma\left(\frac{1}{b+1}+1\right)
\end{aligned}
$$

とした。
分散を求める。まず確率変数の二乗の期待値を求める。この計算でも $cu^{b+1}/(b+1)=v$ を用いる。

$$
\begin{aligned}
E_T[T^2] &= \int_0^\infty u^2 f_T(u)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^\infty cu^{b+2}\exp\left(-\frac{c}{b+1}\right)\mathrm{d}u \\
&= \left(\frac{b+1}{c}\right)^{\frac{2}{b+1}}\int_0^\infty v^{\frac{2}{b+1}-1}\exp\left(-v\right)\mathrm{d}v \\
&= \left(\frac{b+1}{c}\right)^{\frac{2}{b+1}}\Gamma\left(\frac{2}{b+1}+1\right)
\end{aligned}
$$

この計算結果から

$$
\begin{aligned}
V_T(t) &= E_T[(T-E_T[T])^2] \\
&= E_T[T^2]-(E_T[T])^2 \\
&= \left(\frac{b+1}{c}\right)^{\frac{2}{b+1}}\Gamma\left(\frac{2}{b+1}+1\right)-\left(\left(\frac{b+1}{c}\right)^{\frac{1}{b+1}}\Gamma\left(\frac{1}{b+1}+1\right)\right)^2 \\
&= \left(\frac{b+1}{c}\right)^{\frac{2}{b+1}}\left(\Gamma\left(\frac{2}{b+1}+1\right)-\Gamma\left(\frac{1}{b+1}+1\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

となる。同様に計算して得た結果と $V_T(t)$ とを並べると次のようになる。

$$V_T(t) = \left(\frac{b+1}{c}\right)^{\frac{2}{b+1}} \left(\Gamma\left(\frac{2}{b+1}+1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{b+1}+1\right)^2\right)$$
$$V_X(x) = \eta^2 \left(\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)^2\right)$$
$$V_L(l) = \Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)^2$$

これを見比べると三者の間の類似性が見えてくる。これは次の式に基づく。a を適当な定数として生存関数が $S(z) = \exp(-az^k)$ の場合

$$E[Z^r] = a^{-\frac{r}{k}}\Gamma\left(\frac{r}{k}+1\right)$$

が成り立つ。これを確かめる。$au^k = v$ とすると

$$\begin{aligned}
E[Z^r] &= \int_0^\infty u^r f(u)\mathrm{d}u \\
&= \left[-u^r S(u)\right]_0^\infty + r\int_0^\infty u^{r-1}S(u)\mathrm{d}u \\
&= r\int_0^\infty \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{r-1}{k}} v^{\frac{r-1}{k}} \exp\left(-v\right) \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{1}{k} v^{\frac{1}{k}-1}\mathrm{d}v \\
&= r\left(a^{-1}\right)^{\frac{r-1}{k}+\frac{1}{k}} \frac{1}{k}\int_0^\infty v^{\frac{r-1}{k}+\frac{r}{k}-1}\exp\left(-v\right)\mathrm{d}v \\
&= a^{-\frac{r}{k}}\Gamma\left(\frac{r}{k}+1\right)
\end{aligned}$$

となる。上記の二乗の期待値の計算に応用すると

$$\begin{aligned}
E_T[T^2] &= \left(\frac{c}{b+1}\right)^{-\frac{2}{b+1}} \Gamma\left(\frac{2}{b+1}+1\right) \\
&= \left(\frac{b+1}{c}\right)^{\frac{2}{b+1}} \Gamma\left(\frac{2}{b+1}+1\right)
\end{aligned}$$

となり、同じ答えとなった。

まだ求めていないワイブル分布の故障率 r を求める。まず $S_L(l) = \exp\left(-l^m\right)$ のとき

$$\begin{aligned}
r(l) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\log S(l) \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\log\exp\left(-l^m\right) \\
&= ml^{m-1}
\end{aligned}$$

であり、$S_X(x)=\exp\left(-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m\right)$ のとき

$$\begin{aligned} r(x) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log S(x) \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log\exp\left(-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m\right) \\ &= \frac{m}{\eta^m}x^{m-1} \\ &= \frac{m}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{m-1} \end{aligned}$$

となる。ここまで触れてこなかったが、$f_X(x),\ f_L(l)$ は次の式の特別な場合と見做せる。

$$f(t)=\frac{m}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{m-1}\exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^m\right)$$

但し $t<\gamma$ のとき $f(t)=0$ とする。或いは $t<\gamma$ を変数の領域外とする。γ は故障の発生しうる時刻の中で最も早いときとする。この式に三つの定数があることから三母数ワイブル分布と呼ばれる。これまで扱った $f_X(x),\ f_L(l)$ については定数の数から一母数ワイブル分布、二母数ワイブル分布と呼ばれる。一番最初に求めたワイブル分布については区別のための名称があるかは分からなかった。三母数については計算を省略して結果のみ記す。

$$\begin{aligned} &r(t)=\frac{m}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{m-1} \\ &S(t)=\exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^m\right) \\ &E[T]=\gamma+\eta\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right) \\ &V(t)=\eta^2\left(\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right)-\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)^2\right) \end{aligned}$$

注意すべきこととして、期待値までは γ だけ平行移動しているが、分散は二母数と同じである。以上をまとめて表にする。ここでは変数を全て t とする。猶、分散に関しては紙面の都合により表の外に纏めた。

表 1　ワイブル分布の重要な値の一覧

	統計検定	一母数	二母数	三母数
t	$0\le t$			$\gamma\le t$
r	ct^b	mt^{m-1}	$\frac{m}{\eta}(\frac{t}{\eta})^{m-1}$	$\frac{m}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{m-1}$
S	$\exp\left(-\frac{c}{b+1}t^{b+1}\right)$	$\exp\left(-t^m\right)$	$\exp\left(-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right)$	$\exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^m\right)$
f	$ct^b\exp\left(-\frac{c}{b+1}t^{b+1}\right)$	$mt^{m-1}\exp\left(-t^m\right)$	$\frac{m}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1}\exp\left(-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right)$	$\frac{m}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{m-1}\exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^m\right)$
E	$\left(\frac{b+1}{c}\right)^{\frac{1}{b+1}}\Gamma\left(\frac{1}{b+1}+1\right)$	$\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)$	$\eta\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)$	$\gamma+\eta\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)$

$$
\begin{aligned}
V(t) &= \left(\frac{b+1}{c}\right)^{\frac{2}{b+1}} \left(\Gamma\left(\frac{2}{b+1}+1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{b+1}+1\right)^2\right) \\
V_1(t) &= \Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)^2 \\
V_2(t) &= \eta^2 \left(\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)^2\right) \\
V_3(t) &= \eta^2 \left(\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

三つの母数表示の危険率について $m=1$ のとき、それぞれ

$$
r(t) = 1,\ \frac{1}{\eta},\ \frac{1}{\eta}
$$

となり、定数であることが分かる。そのため、どの母数でも $m=1$ のとき指数分布となる。また統計検定の式では $b=0$ のとき

$$
r(t) = c
$$

となり、こちらも指数分布となる。$b,\ c$ の値の範囲を調べる。

まず故障率 $r(t)=ct^b$ は単位時間当たりの率であり非負である。そのため $0 \leq c$ でなければならない。確率密度関数は全ての変数領域で積分すれば一となる。上記と同じように積分する。変数変換 $u = ct^{b+1}/(b+1)$ をするが、$c=0$ のとき積分しても零となるため不適である。故に先程の不等式と合わせて $0<c$ である。変数変換より

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t &= \int_0^\infty ct^b \exp\left(-\frac{c}{b+1}t^{b+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \exp\left(-u\right)\mathrm{d}u \\
&= 1
\end{aligned}
$$

と積分できる。一番最後の積分は u が正のとき成り立つ。不等式 $0<c$ と変数の領域 $0 \leq t \leq \infty$ とから、これを満たすのは $0<b+1$ のときである。以上より $-1<b,\ 0<c$ である。XXXXXXX 積分の方法は他に $f(t) = -\mathrm{d}S(t)/\mathrm{d}t$ より

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t &= -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
&= S(0) - S(\infty)
\end{aligned}
$$

から計算できる。XXXXXXXXXXXXXXX

三つの母数ワイブル分布の母数の領域について考える。まず母数 m の領域を一母数ワイブル分布を用いて考える。これは統計検定の式と同じように確率密度関数を積分して一になることを確かめる。変数変換 $t^m = v$ として

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t &= \int_0^\infty mt^{m-1}\exp\left(-t^m\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \exp\left(-v\right)\mathrm{d}v \\
&= \left[-\exp\left(-v\right)\right]_0^\infty \\
&= 1
\end{aligned}
$$

となる。これが成り立つのは $0 < m$ のときである。例えば $m = -1$ のとき $v = 1/t$ のため変数域は $t : 0 \to \infty$ から $v : \infty(= \frac{1}{0}) \to 0(= \frac{1}{\infty})$ へと変換され最終的な積分値は -1 となる。そのため非負である。このことは確率の原則に反するため不適である。また $m = 0$ のとき積分しても零となるため不適である。以上より $0 < m$ である。$m = 1$ のとき故障率は

$$r(t) = 1$$

と定数になる。また $m = 0.5$ のとき

$$r(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

となる。これは $t = 0$ のとき無限大になり、t が大きくなるにつれて減少する曲線を書く。$m = 3$ のとき

$$r(t) = 3t^2$$

となる。これは放物線を書く。このように m の値により故障率の曲線が変化する。そのため m を形状母数と呼ぶ。上の例から分かるように $0 < m < 1$ のとき時間が経つごとに故障率が減少する。つまり故障が早い時間に発生しやすい。この場合の故障は製造段階で何らかの不備があったためと考えられ、使用初期から故障しやすいが、時間がたつごとに製造工程に由来する故障は発生しにくくなる。そのため故障を分類したときこのような故障を初期故障型という。また $m = 1$ では時間に依らず偶然発生したと考えられる。そのため偶発故障型という。$1 < m$ では期間がたつにつれ故障率が上昇する。故障の原因が摩耗だといえる。そのため摩耗故障型という。

続いて η を二母数ワイブル分布から考える。こちらも変数変換の際に符号の反転を防止するため $0 < \eta$ とする。上の表より

$$E[T] \propto \eta$$
$$V(t) \propto \eta^2$$

であり、他にも危険率については m, t を除してい、尺度を定めているといえる。そのため η を尺度母数と呼ぶ。

最後に母数 γ を考える。変数変換

$$w = \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^m$$

とおくと三母数での確率密度関数の積分領域 $t : \gamma \to \infty$ は $t = \gamma$ のとき

$$\left(\frac{\gamma-\gamma}{\eta}\right)^m = 0$$

であり、$t = \infty$ のとき

$$\left(\frac{\infty-\gamma}{\eta}\right)^m = \infty$$

であることから $w : 0 \to \infty$ に変換される。故に

$$\begin{aligned}\int_\gamma^\infty f(t)\mathrm{d}t &= \int_\gamma^\infty \frac{m}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{m-1} \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^m\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \exp\left(-w\right)\mathrm{d}w \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。この計算からわかるように γ は負であっても問題ないと思われる。ここで $0 > \gamma$ として生存関数 $S(t)$ に代入してみると時刻 $t = \gamma$ で

$$S(\gamma) = 1$$

となるが、時刻 $t = 0$ で

$$S(0) = \exp\left(-\left(\frac{-\gamma}{\eta}\right)^m\right) < 1$$

となるため $\gamma \leq t < 0$ で故障が発生していた。つまり生存関数 $S(t)$ はその時間までに故障していない確率であるため使用開始時点 $t = 0$ ですでに故障していると解釈できる。使用開始時点では故障していないことを前提にするのであれば $0 \leq \gamma$ とするべきであろう。このことから γ は故障の最初に発生しうる位置を定めている係数と考えられる。そのため位置母数と呼ぶ。

製品の l 故障率の時間変化を図示するため故障率 $r(t)$ の描く曲線を時間ごとに形状母数を変える。形状母数 m の添え字を初期故障型 $0 < m < 1$ では m_1 と、偶発故障型 $m = 1$ では m_2 と、摩擦故障型 $1 < m$ では m_3 とおく。この形状母数 m ごとの故障率は

$$r(t) = \begin{cases} \frac{m_1}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{m_1-1} & (\gamma \leq t < t_1) \\ \frac{m_2}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{m_2-1} & (t_1 \leq t < t_2) \\ \frac{m_3}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{m_3-1} & (t_2 \leq t < \infty) \end{cases}$$

と書かれる。故障率が境界 t_1 においてズレが生じないのは

$$\frac{m_1}{\eta}\left(\frac{t_1-\gamma}{\eta}\right)^{m_1-1} = \frac{m_2}{\eta}\left(\frac{t_1-\gamma}{\eta}\right)^{m_2-1}$$

$$t_1 = \gamma + \eta\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{m_1-1}}\left(\frac{t_1-\gamma}{\eta}\right)^{\frac{m_2-1}{m_1-1}}$$

のときである。解析的に t_1 求めるのは難しいが偶発的故障 $m_2 = 1$ であることから

$$\begin{aligned} t_1 &= \gamma + \eta\left(\frac{1}{m_1}\right)^{\frac{1}{m_1-1}}\left(\frac{t_1-\gamma}{\eta}\right)^{\frac{0}{m_1-1}} \\ &= \gamma + \eta\left(\frac{1}{m_1}\right)^{\frac{1}{m_1-1}} \\ &= \gamma + \eta m_1^{\frac{1}{1-m_1}} \end{aligned} \tag{1}$$

である。同様に考え

$$t_2 = \gamma + \eta m_3^{\frac{1}{1-m_3}}$$

である。この場合

$$r(t) = \begin{cases} \frac{m_1}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{m_1-1} & (\gamma \leq t < \gamma + \eta m_1^{\frac{1}{1-m_1}}) \\ \frac{1}{\eta} & (\gamma + \eta m_1^{\frac{1}{1-m_1}} \leq t < \gamma + \eta m_3^{\frac{1}{1-m_3}}) \\ \frac{m_3}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{m_3-1} & (\gamma + \eta m_3^{\frac{1}{1-m_3}} \leq t < \infty) \end{cases}$$

となり、$\gamma = 0$ であれば

$$r(t) = \begin{cases} \frac{m_1}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m_1-1} & (0 \leq t < \eta m_1^{\frac{1}{1-m_1}}) \\ \frac{1}{\eta} & (\eta m_1^{\frac{1}{1-m_1}} \leq t < \eta m_3^{\frac{1}{1-m_3}}) \\ \frac{m_3}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m_3-1} & (\eta m_3^{\frac{1}{1-m_3}} \leq t < \infty) \end{cases}$$

となる。これを図示するため具体的な値を代入する。$m_1 = 1/2,\ m_3 = 3$ として $\eta = 10^3\ \mathrm{T}$ とすると

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \times 10^{-3} \left(\frac{t}{10^3\ \mathrm{T}}\right)^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{T}^{-1} & (0 \leq t < 250\ \mathrm{T}) \\ 1 \times 10^{-3}\ \mathrm{T}^{-1} & (250\ \mathrm{T} \leq t < \frac{1}{\sqrt{3}} \times 10^3\ \mathrm{T}) \\ 3 \times 10^{-3} \left(\frac{t}{10^3\ \mathrm{T}}\right)^{2}\ \mathrm{T}^{-1} & (\frac{1}{\sqrt{3}} \times 10^3\ \mathrm{T} \leq t < \infty) \end{cases}$$

となる。これを図示したものが故障率曲線（バスタブ曲線）と呼ばれる。

続いて生存関数を累積分布関数を用いて $S(t) = 1 - F(t)$ と書き表し、

$$1 - F(t) = \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^m\right)$$

の対数を二回とると

ゴンペルツ分布

後日

離散分布における故障率（危険率）

連続の場合の故障率は次の条件付き確率を出発点とした。

『故障による機械の寿命を T として、時刻 t までに寿命を迎えていないことを前提とする。t 以上、$t+\Delta t$ 未満の時間幅で寿命を迎える条件付き確率を

$$P(t \leq T < t+\Delta t | t \leq T)$$

とする。』

離散的な場合は次の条件付き確率から出発する。機械の寿命を T として、時刻 t までに寿命を迎えていないことを前提とする。時刻 t で寿命を迎える条件付き確率を

$$P(t = T | t \leq T)$$

とする。また離散変数において短い時間の幅 Δt に当たるのは単位時間 $1\ \mathrm{T}$ であるため $r(t)\Delta t$ に相当する式は $r(t) \times 1\ \mathrm{T}$ である。両辺を単位時間で除した

$$r(t) := \frac{P(t = T | t \leq T)}{1\ \mathrm{T}}$$

を以って離散の場合の故障率と定義する。この次元は T^{-1} である。別に故障（ハザード）確率

$$h(t) := r(t) \times 1\ \mathrm{T}$$

を定義すると無次元となる。これは確率である。離散での故障率の定義では次元こそ異なるものの数値上、故障確率と同じ値がでるため確率と見做せるが、連続における故障率は一より大きい値が出るように率は一般に確率と同じ値ではない。率と確率との違いに注意すること。

故障確率は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} h(t) &= r(t) \times\ 1\ \mathrm{T} \\ &= P(t = T | t \leq T) \\ &= \frac{P(t = T \cap t \leq T)}{P(t \leq T)} \\ &= \frac{P(t = T)}{P(t \leq T)} \end{aligned}$$

続いて生存率を

$$S(t) := P(t \leq T)$$

と定義する。ここで離散的であるため時間を

$$\{t \leq T\} = \{t = T\} + \{t+1 \leq T\}$$

と排反に分割できるとする。この分割より確率の有限加法性

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

が成り立つことから

$$P(t \leq T) = P(t = T) + P(t+1 \leq T)$$

が成り立つとする。これに上記の生存関数を代入すると

$$S(t) = P(t = T) + S(t+1)$$

となる。故障率の式 $r(t)=P(t=T)/P(t\leq T)$ を書き換えると $P(t=T)=r(t)S(t)$ となる。これを用いて更に書き換えると

$$S(t+1)=S(t)(1-r(t))$$

となる。$S(1)=1$ としてこの漸化式を用いると

$$\begin{aligned}S(t)&=S(t-1)\,(1-r(t-1))\\&=S(t-2)\,(1-r(t-2))\,(1-r(t-1))\\&=\cdots\\&=S(1)\,(1-r(1))\,(1-r(2))\cdots(1-r(t-2))\,(1-r(t-1))\\&=\prod_{j=1}^{t-1}(1-r(j))\end{aligned}$$

となる。XXXXXXX これは変数の始点 $t=1$ としたためであり、$t=0$ とした場合は $S(t)=\prod_{j=0}^{t-1}(1-r(j))$ となる。XXXXXXXXXX これは離散変数の場合の微分方程式に当たり差分方程式という。他に差分作用素 $\Delta,\ \nabla$ を用いて別の表現を取ることがある。

$$\Delta S(t):=S(t+1)-S(t)$$

で定義される前進差分作用素 Δ を用いると

$$\begin{aligned}S(t+1)&=S(t)(1-r(t))\\S(t+1)-S(t)+r(t)S(t)&=0\\(\Delta+r(t))S(t)&=0\end{aligned}$$

と書ける。これは連続変数の微分方程式

$$(D+r(t))\,S(t)=0$$

に対応するもので差分方程式という。また漸化式より確率質量関数は

$$P(t=T)=S(t)-S(t+1)$$

である。以下、確率質量関数は $f(t)$ と書く。先程の生存関数の式を用いると

$$\begin{aligned}f(t)&=S(t)-S(t+1)\\&=\prod_{j=1}^{t-1}(1-r(j))-\prod_{j=1}^{t}(1-r(j))\\&=(1-r(1))\,(1-r(2))\cdots(1-r(t-1))\,\{1-(1-r(t)\}\\&=\prod_{j=1}^{t-1}(1-r(j))\,r(t)\\&=r(t)S(t)\end{aligned}$$

となる。漸化式の他の書き換えとして $S(t+1)=S(t)(1-r(t))$ より

$$r(t)=1-\frac{S(t+1)}{S(t)}=\frac{S(t)-S(t+1)}{S(t)}$$

である。　期待値を求める。初項を $t=1$ 末項を $t=\tau$ とすると定義より

$$E[T]=\sum_{1}^{\tau} tf(t)$$

である。漸化式 $f(t)=S(t)-S(t+1)$ より

$$\begin{aligned}
E[T]&=\sum_{1}^{\tau} tf(t)\\
&=1\left\{S(1)-S(2)\right\}+2\left\{S(2)-S(3)\right\}+3\left\{S(3)-S(4)\right\}+\cdots+\tau\left\{S(\tau)-S(\tau+1)\right\}\\
&=S(1)+S(2)+S(3)+\cdots+S(\tau)-\tau S(\tau+1)\\
&=\sum_{t=1}^{\tau} S(t)-\tau S(\tau+1)
\end{aligned}$$

となる。生存関数は変数が無限大になるとき零に収束するとき

$$\lim_{\tau\to\infty} E[T]=\sum_{t=1}^{\infty} S(t)$$

となる。これは連続の場合において

$$E[T]=\int S(t)\mathrm{d}t-[tS(t)]$$

が境界において $tS(t)$ が零になれば

$$E[T]=\int S(t)\mathrm{d}t$$

となることに対応する。

ここまでの結果を連続離散で対比しつつ生存関数を軸にまとめる。表には記載していないが $f(t)=r(t)S(t)$

表 2　生存関数と他の式との関係式の一覧

変数 t	離散	連続
生存関数 $S(t)=$	$\prod_j(1-r(j))$	$\exp\left(-\int r(t)\mathrm{d}t\right)$
方程式	$(\Delta+r(t))S(t)=0$	$(D+r(t))S(t)=0$
故障率 $r(t)=$	$(S(t)-S(t+1))/S(t)$	$-D\log S(t)$
確率関数 $f(t)=$	$S(t)-S(t+1)$	$-DS(t)$
期待値 $E[T]=$	$\sum_t S(t)$	$\int S(t)\mathrm{d}t$

は離散でも連続でも成立する。

$$f(t)=r(t)S(t)=\begin{cases} r(t)\displaystyle\prod_{j=1}^{t-1}(1-r(j)) & \text{離散}\\ r(t)\exp\left(-\displaystyle\int r(t)\mathrm{d}t\right) & \text{連続}\end{cases}$$

幾何分布

幾何分布は二種類存在する。試行回数 n を確率変数とするものと失敗回数 l を確率変数とするものとである。

$$f = \begin{cases} (1-p)^{n-1}p \\ (1-p)^{l}p \end{cases}$$

前者の生存関数、確率質量関数を求める。危険率が定数 p であるとき生存関数は

$$S(n) = \prod_{j=1}^{n-1}(1-p) = (1-p)^{n-1}$$

となる。これを用いると確率質量関数は

$$\begin{aligned} f(n) &= S(n) - S(n+1) \\ &= (1-p)^{n-1} - (1-p)^{n} \\ &= (1-p)^{n-1}p \end{aligned}$$

となる。期待値は定義通り

$$E[N] = \sum_{n=1}^{\nu} nf(n)$$

から求めることができるが、定義からの求め方は別の章に記してあるためここでは先程求めた期待値の公式を用いる。

$$E[N] = \sum_{n=1}^{\nu} S(n) = (1-p)^0 + (1-p)^1 + (1-p)^2 + \cdots + (1-p)^{\nu}$$

これを $1-p$ を乗したもの $(1-p)E[N]$ で引く。$0 < p$ のとき

$$\begin{aligned} E[N] - (1-p)E[N] &= (1-p)^0 + (1-p)^1 + (1-p)^2 + \cdots + (1-p)^{\nu} \\ &\quad - (1-p)\left\{(1-p)^0 + (1-p)^1 + (1-p)^2 + \cdots + (1-p)^{\nu}\right\} \\ (1-(1-p))E[N] &= (1-p)^0 - (1-p)^{\nu+1} \\ E[N] &= \frac{1-(1-p)^{\nu+1}}{p} \end{aligned}$$

となる。ここで ν が無限大になるとき $p \leq 1$ より

$$\lim_{\nu\to\infty} E[T] = \frac{1}{p}$$

となる。N^2 の期待値は

$$\begin{aligned}
E[N^2] &= \sum_{n=1}^{\nu} n^2 f(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\nu} n^2 \left(S(n) - S(n+1)\right) \\
&= S(1) + (2^2-1)S(2) + (3^2-2^2)S(3) + \cdots + (\nu^2 - (\nu^2-1))S(\nu) - \nu^2 S(\nu+1) \\
&= (2\cdot 1-1)S(1) + (2\cdot 2-1)S(2) + (2\cdot 3-1)S(3) + \cdots + (2\nu-1))S(\nu) - \nu^2 S(\nu+1) \\
&= \sum_{n=1}^{\nu}(2n-1)S(n) - \nu^2 S(\nu+1) \\
&= 2\sum_{n=1}^{\nu} nS(n) - \sum_{n=1}^{\nu} S(n) - \nu^2 S(\nu+1)
\end{aligned}$$

と計算できる。この第一項を $K(n)$ とすると

$$K(n) = 2\sum_{n=1}^{\nu} nS(n) = 2\left\{(1-p)^0 + 2(1-p)^1 + \cdots + \nu(1-p)^{\nu-1}\right\}$$

と書き下せる。これに $1-p$ を掛けたもので引くと

$$\begin{aligned}
\left(1-(1-p)\right)K(n) &= 2\left\{(1-p)^0 + (1-p)^1 + \cdots + (1-p)^{\nu-1} - \nu(1-p)^{\nu}\right\} \\
K(n) &= \frac{2}{p}\left\{\sum_{n=1}^{\nu}(1-p)^{n-1} - \nu(1-p)^{\nu}\right\}
\end{aligned}$$

負の二項分布

幾何分布の生存関数を差分方程式を用いて求める。ここでは試行回数を確率変数とし t で表す。差分方程式の $r(t)$ に p を代入すると

$$\begin{aligned}(\Delta+p)S(t)&=0\\ S(t+1)&=(1-p)S(t)\end{aligned}$$

となる。この結果より

$$S(t)=S(1)(1-p)^{n-1}$$

を得る。後は初期条件 $S(1)=1$ を代入すればいい。生存関数に関する指数分布の微分方程式

$$(D+\lambda)S(t)=0$$

の拡張としてガンマ分布での微分方程式

$$(D+\lambda)^k S(t)=0$$

を得た。同様に考え幾何分布の拡張として

$$(\Delta+p)^k S(t)=0$$

から負の二項分布の生存関数を求める。生存関数をベクトル表記する。

$$\overrightarrow{S}(t)=(S(1),\ldots,S(t))^{\mathrm{T}}$$

前進差分作用素 Δ は

$$\Delta=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$$

で表せる。作用させてみると

$$\begin{aligned}\Delta\overrightarrow{S}(t)&=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S(1)\\ S(2)\\ S(3)\\ \vdots\\ S(t)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}S(2)-S(1)\\ S(3)-S(2)\\ \vdots\\ S(t)-S(t-1)\\ -S(t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり、終端の項以外は前進差分 $S(k)\to S(k+1)-S(k)$ となっていることが確かめられた。これは前進シ

フト作用素 E と呼ばれる作用素と単位行列 I とに分解できる。

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&= E - I
\end{aligned}
$$

この前進シフト作用素とはベクトルの要素を一つ前進させる作用素である。

$$
\begin{aligned}
E\overrightarrow{S}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(1) \\ S(2) \\ S(3) \\ \vdots \\ S(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} S(2) \\ S(3) \\ \vdots \\ S(t) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

他に乗算作用素 M_{a^t} を

$$
M_{a^t} := \begin{pmatrix} a^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^t \end{pmatrix}
$$

で定義する。これを作用させると

$$
\begin{aligned}
M_{a^t}\overrightarrow{S}(t) &= \begin{pmatrix} a^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(1) \\ S(2) \\ S(3) \\ \vdots \\ S(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^1 S(1) \\ a^2 S(2) \\ a^3 S(3) \\ \vdots \\ a^t S(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と対応した a の乗数が $S(t)$ に掛けることができる。この定義式から分かるように a を掛けると

$$aM_{a^t} = a\begin{pmatrix} a^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a^4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{t+1} \end{pmatrix} = M_{a^{t+1}}$$

と一つ大きい乗算作用素に変えることができる。また逆数を掛ける乗算作用素 $M_{a^{-t}}$ を

$$M_{a^{-t}} := \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^{-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a^{-3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{-t} \end{pmatrix}$$

で定義する。二つの乗算作用を掛け合わせると

$$\begin{aligned} M_{a^t}M_{a^{-t}} &= \begin{pmatrix} a^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^{-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a^{-3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ &= I \end{aligned}$$

と単位行列となる。他に重要な特徴として左から前進シフト作用素を掛けると

$$\begin{aligned} EM_{a^t} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a^4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{t+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ &= M_{a^{t+1}}E \end{aligned}$$

となり、一つ大きい乗算作用素に右から前進シフト作用素を掛けてものと等しくなることが挙げられる。
ここで出発点とする差分方程式 $(\Delta + p)^k S(t) = 0$ の p は単位行列が掛かっているものとする。加えて $a = 1 - p$ とする。まず $k = 1$ のとき

$$\begin{aligned}
(\Delta + pI)\overrightarrow{S}(t) &= (E - (1-p)I)I\overrightarrow{S}(t) \\
&= (E - aI)M_{a^t}\left\{M_{a^{-t}}\overrightarrow{S}(t)\right\} \\
&= M_{a^{t+1}}E\left\{M_{a^{-t}}\overrightarrow{S}(t)\right\} - M_{a^{t+1}}\left\{M_{a^{-t}}\overrightarrow{S}(t)\right\} \\
&= M_{a^{t+1}}(E - I)\left\{M_{a^{-t}}\overrightarrow{S}(t)\right\} \\
&= M_{a^t}a\Delta\left\{M_{a^{-t}}\overrightarrow{S}(t)\right\}
\end{aligned}$$

となる。つまり $M_{a^{-t}}\overrightarrow{S}(t)$ を $\overrightarrow{T}(t)$ とすると

$$(\Delta + pI)\overrightarrow{S}(t) = 0$$

は

$$M_{a^t}a\Delta\overrightarrow{T}(t) = 0$$

と書き換えられる。これを参考に $k = 2$ を計算すると

$$\begin{aligned}
(\Delta + pI)^2\overrightarrow{S}(t) &= (\Delta + pI)M_{a^t}a\Delta\overrightarrow{T}(t) \\
&= (E - aI)M_{a^t}M_{a^{-t}}M_{a^t}a\Delta\overrightarrow{T}(t) \\
&= (E - aI)M_{a^t}\left\{a\Delta\overrightarrow{T}(t)\right\} \\
&= M_{a^t}a^2\Delta^2\overrightarrow{T}(t)
\end{aligned}$$

となる。これを繰り返すと

$$(\Delta + pI)^k\overrightarrow{S}(t) = 0$$

は

$$M_{a^t}a^k\Delta^k\overrightarrow{T}(t) = 0$$

となる。この差分方程式に逆数の乗算作用素 $M_{a^{-t-k}}$ を左から作用させると

$$\Delta^k\overrightarrow{T}(t) = 0$$

となる。ここで $\overrightarrow{S}(t)$ に戻すと

$$\Delta^k\left\{M_{a^{-t}}\overrightarrow{S}(t)\right\} = 0$$

となる。ここまでの操作は微分方程式での

$$(D + \lambda)^k S(t) = 0$$

を

$$D^k\left\{\exp(-\lambda t)S(t)\right\} = 0$$

と書き換える操作に対応する。微分方程式ではこの後で積分をするが、差分方程式では累積和をとる。この計算準備をする。まずパスカル行列を定義する。

$$
\begin{aligned}
L_N &:= \begin{pmatrix}
\binom{0}{0} & \binom{0}{1} & \binom{0}{2} & \binom{0}{3} & \binom{0}{4} & \binom{0}{5} & \cdots \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \binom{1}{2} & \binom{1}{3} & \binom{1}{4} & \binom{1}{5} & \cdots \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \binom{2}{3} & \binom{2}{4} & \binom{2}{5} & \cdots \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \binom{3}{4} & \binom{3}{5} & \cdots \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \binom{4}{5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

これをパスカル行列という。但し二項係数の第一の引数が第二の引数より小さいときは零とした。他に上三角行列のパスカル行列 U、対称行列のパスカル行列 $P = LU$ などがあるが、ここではパスカル行列と言えば下三角行列のパスカル行列 L のみを指す。この行列の特徴として $L_N E_N L_N^{-1} = \Delta$ が凡そ成り立つことが挙げられる。$N = 4$ を例に確かめる。

$$
\begin{aligned}
L_4 E_4 L_4^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \Delta + \text{他}
\end{aligned}
$$

前進差分作用素と同じように末項では成立しない。他とした値が二項係数であることに着目し、補正として前進シフト作用素の代わりに

$$
J_N = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-\binom{N}{0} & -\binom{N}{1} & -\binom{N}{2} & -\binom{N}{3} & \cdots & -\binom{N}{N-1}
\end{pmatrix}
$$

を用いる。この場合では

$$
\begin{aligned}
L_4 J_4 L_4^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \Delta
\end{aligned}
$$

となる。但し N が無限大であれば、恐らく前進シフト作用素でも成立する。この下三角行列は逆行列を持つため積をとると単位行列となる。

$$L_N^{-1} L_N = I$$

このことを用いると前進差分作用素の累乗は

$$\Delta^k = \left(L_N J_N L_N^{-1}\right)^k = L_N J_N^k L_N^{-1}$$

となる。
行列 A について

$$A \overrightarrow{f} = 0$$

を満たすベクトル $\overrightarrow{f}$ の集合を核といい

$$\overrightarrow{f} \in \ker A$$

と表す。これを上記の差分方程式に当てはめると

$$\Delta^k \left\{ M_{a^{-t}} \overrightarrow{S}(t) \right\} = 0$$

の作用素 Δ^k の核であるベクトルに $\left\{ M_{a^{-t}} \overrightarrow{S}(t) \right\}$ が属す。上記の累乗 $\Delta^k = L_N J_N^k L_N^{-1}$ から

$$\ker \Delta^k = \ker \left(L_N J_N^k L_N^{-1}\right)$$

である。$\Delta = L_N J_N L_N^{-1}$ と同じように先程の A は逆行列をもつ C を用いて別の行列

$$B = CAC^{-1}$$

と表せるとする。この k 乗は

$$B^k = CA^k C^{-1}$$

と計算できる。この B^k の核を $\overrightarrow{x}$ とすると

$$B^k \overrightarrow{x} = 0$$

が成り立ち、計算結果を代入すると

$$CA^k C^{-1} \overrightarrow{x} = 0$$

となる。この式に左から C^{-1} を作用させると

$$A^k C^{-1} \overrightarrow{x} = 0$$

となる。この式より A^k の核は
$$C^{-1}\overrightarrow{x} \in \ker A^k$$

である。この式に左から C を作用させると

$$\overrightarrow{x} \in C \ker A^k$$

となる。つまり $\overrightarrow{x} \in \ker B^k$ ならば $\overrightarrow{x} \in C \ker A^k$ である。
一方で A^k の核を $\overrightarrow{y}$ とすると、
$$A^k \overrightarrow{y} = 0$$

となり、先程の関係式 $B^k = CA^kC^{-1}$ を書き換えた $C^{-1}B^kC = A^k$ より

$$B^k C \overrightarrow{y} = 0$$

が成り立つ。この式から
$$C\overrightarrow{y} \in \ker B^k$$

となる。つまり $\overrightarrow{y} \in \ker A^k$ ならば $C\overrightarrow{y} \in \ker B^k$ である。
以上より二つの核 $\ker B^k$、$C \ker A^k$ は等しく

$$\ker B^k = C \ker A^k$$

が成り立つ。これを用いると $\ker \Delta^k$ は

$$\ker \Delta^k = L_N \ker \left(J_N^k\right)$$

となる。$\ker \left(J_N^k\right)$ を求める前に前進シフト作用素の核 $\ker \left(E^k\right)$ を求める。まずこの作用素の特徴として、ベクトルを前進させる事が挙げられる。これはワンホットベクトルでも変わらず

$$\begin{aligned}
E\overrightarrow{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \overrightarrow{e}_1
\end{aligned}$$

このワンホットベクトルに二回前進シフト作用素を掛けると

$$
\begin{aligned}
E^2\overrightarrow{e}_2 &= E\overrightarrow{e}_1 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \overrightarrow{0}
\end{aligned}
$$

となる。このことから分かるように $k \geq n$ であれば

$$
E^k\overrightarrow{e}_n = \overrightarrow{0}
$$

が成り立つ。つまり $k \geq n$ であるとしてワンホットベクトルの指すベクトルの集合が E^k の核である。

$$
\ker E^k = \mathrm{span}\{\overrightarrow{e}_1,\ \overrightarrow{e}_2, \cdots, \overrightarrow{e}_k\}
$$

ワンホットベクトルにパスカル行列 L を作用させるとどうなるかを考える。ワンホットベクトルの特徴として第 a 成分が一の $\overrightarrow{e}_a$ は行列を左からかけると行列の a 列の成分からなるベクトルに変化する事が挙げられる。例えば $a = 4$ のとき

$$
\begin{aligned}
L_N\overrightarrow{e}_4 &:= \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{0}{1} & \binom{0}{2} & \binom{0}{3} & \binom{0}{4} & \binom{0}{5} & \cdots \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \binom{1}{2} & \binom{1}{3} & \binom{1}{4} & \binom{1}{5} & \cdots \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \binom{2}{3} & \binom{2}{4} & \binom{2}{5} & \cdots \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \binom{3}{4} & \binom{3}{5} & \cdots \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \binom{4}{5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \binom{0}{3} \\ \binom{1}{3} \\ \binom{2}{3} \\ \binom{3}{3} \\ \binom{4}{3} \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ \vdots \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。或いは行列の行成分を抽出していると言えるかもしれない。このようなベクトルを行列 L の構成要素であることを表すため、その小文字を使い $\overrightarrow{l}$ と表すことにする。但し、添え字のずれがあり $a = 4$ では

$\overrightarrow{l}_3 := L_N \overrightarrow{e}_4$ となる。つまり行列 L は

$$L = (\overrightarrow{l}_0, \overrightarrow{l}_1, \overrightarrow{l}_2, \cdots, \overrightarrow{l}_{n-1})$$

とも表せる。更にパスカル行列の定義からベクトルの成分は

$$\overrightarrow{l}_a(b) = \binom{b-1}{a}$$

である。先程の例では $L_N \overrightarrow{e}_4$ の第五成分は

$$L_N \overrightarrow{e}_4(5) = \overrightarrow{l}_3(5) = \binom{4}{3} = 4$$

である。

前進差分作用素 E^k の核にパスカル行列 L を掛けると

$$\begin{aligned} L \ker E^k &= L \ \mathrm{span}\{\overrightarrow{e}_1,\ \overrightarrow{e}_2, \cdots, \overrightarrow{e}_k\} \\ &= \mathrm{span}\{\overrightarrow{l}_0, \overrightarrow{l}_1,\ \overrightarrow{l}_2, \cdots, \overrightarrow{l}_{k-1}\} \end{aligned}$$

となる。以上より境界を無視する場合において

$$\Delta^k \left\{ M_{a^{-t}} \overrightarrow{S}(t) \right\} = 0$$

の解ベクトルは

$$\mathrm{span}\{\overrightarrow{l}_0, \overrightarrow{l}_1,\ \overrightarrow{l}_2, \cdots, \overrightarrow{l}_{k-1}\}$$

の線型結合である。この結果より負の二項分布における生存関数 $\overrightarrow{S}(t)$ は

$$M_{a^t} \mathrm{span}\{\overrightarrow{l}_0, \overrightarrow{l}_1,\ \overrightarrow{l}_2, \cdots, \overrightarrow{l}_{k-1}\}$$

の線型結合である。そのため c を適当な定数として、これからなるベクトルとの積をとると

$$
\begin{aligned}
M_{a^t}L_t\overrightarrow{c} &= \begin{pmatrix} a^1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{0}{1} & \binom{0}{2} & \binom{0}{3} & \cdots & \binom{0}{t-1} \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \binom{1}{2} & \binom{1}{3} & \cdots & \binom{1}{t-1} \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \binom{2}{3} & \cdots & \binom{2}{t-1} \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \cdots & \binom{3}{t-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{t-1}{0} & \binom{t-1}{1} & \binom{t-1}{2} & \binom{t-1}{3} & \cdots & \binom{t-1}{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{t-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^1\binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2\binom{1}{0} & a^2\binom{1}{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a^3\binom{2}{0} & a^3\binom{2}{1} & a^3\binom{2}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ a^4\binom{3}{0} & a^4\binom{3}{1} & a^4\binom{3}{2} & a^4\binom{3}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^t\binom{t-1}{0} & a^t\binom{t-1}{1} & a^t\binom{t-1}{2} & a^t\binom{t-1}{3} & \cdots & a^t\binom{t-1}{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{t-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^1\binom{0}{0}c_0 \\ a^2\binom{1}{0}c_0 + a^2\binom{1}{1}c_1 \\ a^3\binom{2}{0}c_0 + a^3\binom{2}{1}c_1 + a^3\binom{2}{2}c_2 \\ a^4\binom{3}{0}c_0 + a^4\binom{3}{1}c_1 + a^4\binom{3}{2}c_2 + a^4\binom{3}{3}c_3 \\ \vdots \\ a^t\binom{t-1}{0}c_0 + a^t\binom{t-1}{1}c_1 + a^t\binom{t-1}{2}c_2 + a^t\binom{t-1}{3}c_3 + \cdots + a^t\binom{t-1}{t-1}c_{t-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^1\sum_{j=0}^{k-1} c_j\binom{0}{j} \\ a^2\sum_{j=0}^{k-1} c_j\binom{1}{j} \\ a^3\sum_{j=0}^{k-1} c_j\binom{2}{j} \\ a^4\sum_{j=0}^{k-1} c_j\binom{3}{j} \\ \vdots \\ a^t\sum_{j=0}^{k-1} c_j\binom{t-1}{j} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。これを以って生存関数ベクトル $\overrightarrow{S}(t)$ とする。総和の引数の最大値を全て $k-1$ としたのは二項係数の第一引数が第二引数より小さいとき零になると定義したことを利用しているためである。
定数項 c を求める。まず $t=1$ のとき

$$
\begin{aligned}
S(1) &= a^1\sum_{j=0}^{k-1} c_j\binom{0}{j} \\
&= a\left\{c_0\binom{0}{0} + c_1\binom{0}{1} + \cdots\right\} \\
&= ac_0
\end{aligned}
$$

であり、$S(1)=1$ とすると $a=1-p$ より

$$1 = (1-p)c_0$$

となるため

$$c_0 = \frac{1}{1-p}$$

となる。$t=2$ のとき

$$
\begin{aligned}
S(2) &= a^2 \sum_{j=0}^{k-1} c_j \binom{1}{j} \\
&= a^2 \left\{ c_0 \binom{1}{0} + c_1 \binom{1}{1} + c_2 \binom{1}{2} + \cdots \right\} \\
&= a^2 \left\{ c_0 + c_1 \right\}
\end{aligned}
$$

となる。ここでも生存関数を一とすると

$$
c_1 = \frac{1}{a^2} - c_0 = \frac{p}{(1-p)^2}
$$

となる。ここまでの結果から $j \leq k$ において

$$
c_j = \frac{p^j}{(1-p)^{j+1}}
$$

と考えられる。これを数学的帰納法で示す。$j = x-1$ まで上記の仮定が成立するとする。生存関数は一であるとする。また $a < b$ での二項係数 $\binom{a}{b}$ は零であると定義すると

$$
\begin{aligned}
S(x+1) &= a^{x+1} \sum_{j=0}^{k-1} c_j \binom{x}{j} \\
1 &= a^{x+1} \left\{ \sum_{j=0}^{x-1} c_j \binom{x}{j} + \sum_{j=x}^{x} c_j \binom{x}{j} + \sum_{j=x+1}^{k-1} c_j \binom{x}{j} \right\} \\
\frac{1}{a^{x+1}} &= \left\{ \sum_{j=0}^{x-1} c_j \binom{x}{j} + c_x + 0 \right\} \\
c_x &= \frac{1}{a^{x+1}} - \sum_{j=0}^{x-1} \frac{p^j}{(1-p)^{j+1}} \binom{x}{j} \\
&= \frac{1}{(1-p)^{x+1}} - \frac{1}{1-p} \left\{ \sum_{j=0}^{x} \left(\frac{p}{1-p} \right)^j 1^{x-1-j} \binom{x}{j} - \left(\frac{p}{1-p} \right)^x \right\} \\
&= \frac{1}{(1-p)^{x+1}} - \frac{1}{1-p} \left\{ \left(1 + \frac{p}{1-p} \right)^x - \left(\frac{p}{1-p} \right)^x \right\} \\
&= \frac{p^x}{(1-p)^{x+1}}
\end{aligned}
$$

となる。このことから或る値 $j = x-1$ で成り立つなら一つ大きい値 $j = x$ でも成立する。既に見たように初項 $j = 1$ では成立する。そのため $j \leq k$ の j で成り立つ。
故に負の二項分布の生存関数は

$$
S(t) = (1-p)^t \sum_{j=0}^{k-1} \frac{p^j}{(1-p)^{j+1}} \binom{t-1}{j}
$$

である。幾何分布の生存関数は k を無限大にしたとき一となったのと同様にこちらも一となる。

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} S(t) &= (1-p)^{t-1}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{p}{1-p}\right)^j\binom{t-1}{j} \\
&= (1-p)^{t-1}\left(1+\frac{p}{1-p}\right)^{t-1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

この生存関数の別の表記を求める。先ず不完全ベータ関数は

$$
B_a(b,c) := \int_0^a x^{b-1}(1-x)^{c-1}\mathrm{d}x
$$

で定義される関数である。これを二項定理を用いて書き換えると

$$
\begin{aligned}
B_a(b,c) &= \int_0^a x^{b-1}(1-x)^{c-1}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a x^{b-1}\sum_{j=0}^{c-1}1^{c-1-j}(-x)^j\binom{c-1}{j}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=0}^{c-1}(-1)^j\binom{c-1}{j}\int_0^a x^{b-1}x^j\mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=0}^{c-1}(-1)^j\binom{c-1}{j}\frac{a^{b+j}}{b+j}
\end{aligned}
$$

となる。通常のベータ関数で正規化した不完全ベータ関数は

$$
I_a(b,c) := \frac{B_a(b,c)}{B_1(b,c)}
$$

で定義される。通常のベータ関数は

$$
B_1(b,c) = \frac{(b-1)!(c-1)!}{(b+c-1)!}
$$

であるため、正規化したベータ関数は

$$
\begin{aligned}
I_a(b,c) &= \frac{(b+c-1)!}{(b-1)!(c-1)!}\sum_{j=0}^{c-1}(-1)^j\binom{c-1}{j}\frac{a^{b+j}}{b+j} \\
&= \sum_{j=0}^{c-1}(-1)^j\frac{(b+c-1)!}{(b-1)!(c-1)!}\frac{(c-1)!}{j!(c-1-j)!}\frac{(b+j-1)!}{(b+j)!}a^{b+j} \\
&= \sum_{j=0}^{c-1}(-1)^j\frac{(b+c-1)!}{(c-1-j)!(b+j)!}\frac{(b+j-1)!}{(b-1)!j!}a^{b+j} \\
&= \sum_{j=0}^{c-1}(-1)^j\binom{b+c-1}{c-1-j}\binom{b+j-1}{b-1}a^{b+j}
\end{aligned}
$$

と書き換えられ、続いて二つ目の二項係数 $\binom{b+j-1}{b-1}$ を計算する。まず

$$
\begin{aligned}
\binom{b+j-1}{b-1} &= \frac{(b+j-1)!}{(b-1)!(b+j-1-(b-1))!} \\
&= \binom{b+j-1}{j}
\end{aligned}
$$

と書き換える。ここで二項係数のパスカルの法則

$$\begin{aligned}\binom{p}{q} &= \frac{p!}{q!(p-q)!} \\ &= \frac{(p-q)(p-1)!}{q!(p-q)!} + \frac{q(p-1)!}{q!(p-q)!} \\ &= \frac{(p-1)!}{q!(p-q-1)!} + \frac{(p-1)!}{(q-1)!(p-q)!} \\ &= \binom{p-1}{q} + \binom{p-1}{q-1}\end{aligned}$$

の両辺に $(-1)^q$ を掛けて総和 0 から r までをとる。

$$\sum_{q=0}^{r}(-1)^q\binom{p}{q} = \sum_{q=0}^{r}(-1)^q\binom{p-1}{q} + \sum_{q=0}^{r}(-1)^q\binom{p-1}{q-1}$$

この右辺第二項は

$$\begin{aligned}\sum_{q=0}^{r}(-1)^q\binom{p-1}{q-1} &= \left\{0 + \sum_{q=1}^{r}(-1)^q\binom{p-1}{q-1}\right\} \\ &= \sum_{r=0}^{rt-1}(-1)^{s+1}\binom{p-1}{s} \\ &= -\sum_{q=0}^{r-1}(-1)^q\binom{p-1}{q}\end{aligned}$$

と書き換えられる。そのため

$$\begin{aligned}\sum_{q=0}^{r}(-1)^q\binom{p}{q} &= \sum_{q=0}^{r}(-1)^q\binom{p-1}{q} - \sum_{q=0}^{r-1}(-1)^q\binom{p-1}{q} \\ &= (-1)^r\binom{p-1}{r}\end{aligned}$$

となる。ここで $p=b+j,\ r=j,$ とおくと

$$\sum_{q=0}^{j}(-1)^q\binom{b+j}{q} = (-1)^j\binom{b+j-1}{j}$$

となる。この左辺で $q=b+j-u$ とおくと

$$\begin{aligned}\sum_{q=0}^{j}(-1)^q\binom{b+j}{q} &= \sum_{u=b+j}^{b}(-1)^{b+j-u}\binom{b+j}{b+j-u} \\ &= \sum_{u=b}^{b+j}(-1)^{b+j-u}\binom{b+j}{u}\end{aligned}$$

となる。以上を纏めると

$$(-1)^j\binom{b+j-1}{b-1} = \sum_{u=b}^{b+j}(-1)^{b+j-u}\binom{b+j}{u}$$

である。これを正規化したベータ関数に代入すると

$$\begin{aligned}
I_a(b,c) &= \sum_{j=0}^{c-1}(-1)^j\binom{b+c-1}{c-1-j}\binom{b+j-1}{b-1}a^{b+j} \\
&= \sum_{j=0}^{c-1}\binom{b+c-1}{b+j}\sum_{u=b}^{b+j}(-1)^{b+j-u}\binom{b+j}{u} \quad a^{b+j} \\
&= \sum_{j=0}^{c-1}\sum_{u=b}^{b+j}(-1)^{b+j-u}\binom{b+c-1}{b+j}\binom{b+j}{u}a^{b+j}
\end{aligned}$$

となる。ここでヴァンデルモンドの式

$$\binom{x}{y+z}\binom{y+z}{w} = \binom{x}{w}\binom{x-w}{y+z-w}$$

を用いる。この式は

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \binom{x}{y+z}\binom{y+z}{w} \\
&= \frac{x!}{(y+z)!(x-y-z)!}\frac{(y+z)!}{u!(y+z-w)!} \\
&= \frac{x!}{(x-y-z)!u!(y+z-w)!} \\
&= \frac{x!}{w!(x-w)!}\frac{(x-w)!}{(y+z-w)!(x-y-z)!} \\
&= \binom{x}{w}\binom{x-w}{y+z-w} \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

より成り立つことが確かめられる。正規化したベータ関数に代入する。$b+c-1=n$ とすると

$$\begin{aligned}
I_a(b,c) &= \sum_{j=0}^{c-1}\sum_{u=b}^{b+j}(-1)^{b+j-u}\binom{b+c-1}{b+j}\binom{b+j}{u}a^{b+j} \\
&= \sum_{j=0}^{c-1}\sum_{u=b}^{b+j}(-1)^{b+j-u}\binom{b+c-1}{u}\binom{b+c-1-u}{b+j-u}a^{b+j} \\
&= \sum_{j=0}^{c-1}\sum_{u=b}^{b+j}(-1)^{b+j-u}\binom{n}{u}\binom{n-u}{b+j-u}a^{b+j}
\end{aligned}$$

ここで総和記号の順序を交換する。総和の上限下限は $0 \leq j \leq c-1,\ b \leq u \leq b+j$ とあり、u の上限は j に依って定まるため単純な交換は成立しない。まず現在の総和の関係ではどのような総和であるかを調べるため総和の対象を $f(j,u)$ と置く。まず外側の総和記号の j が 0 のとき $b \leq u \leq b$ となるため内側の総和は $u=b$ のみである。この場合は $\sum_{u=b}^{b} f(0,u) = f(0,b)$ である。次に $j=1$ のとき外側の総和は $b \leq u \leq b+1$ となるため内側の総和は $u=b, b+1$ である。この場合は $\sum_{u=b}^{b+1} f(1,u) = f(1,b)+f(1,b+1)$ である。同様に考え、外側の総和記号の j が $c-1$ のとき $b \leq u \leq b+c-1$ となるため内側の総和は $u=b,\ b+1,\ \cdots, b+c-1$ である。この場合は $\sum_{u=b}^{b+c-1} f(c-1,u) = f(c-1,b)+f(c-1,b+1)+\cdots+f(c-1,b+c-1)$ である。以

上を書き表すと

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{c-1}\sum_{u=b}^{b+j} f(j,u) &= \sum_{u=b}^{b} f(0,u) + \sum_{u=b}^{b+1} f(1,u) + \sum_{u=b}^{b+2} f(2,u) + \cdots + \sum_{u=b}^{b+c-1} f(c-1,u) \\
&= \begin{array}{l}
f(0,b)+ \\
f(1,b)+f(1,b+1)+ \\
f(2,b)+f(2,b+1)+f(2,b+2)+ \\
\vdots \\
f(c-1,b)+f(c-1,b+1)+f(c-1,b+2)\cdots+f(c-1,b+c-1)
\end{array}
\end{aligned}
$$

となる。これと同値な総和記号の順序変換はこれと同じになればいい。この総和を縦にみると $u=b$ のとき j は $0,1,2,\cdots,c-1$ となり、$u=b+1$ のとき j は $1,2,\cdots,c-1$ となり、$u=b+2$ のとき j は $2,\cdots,c-1$ となる。ここから分かることは上限は固定されてい、下限はひとつづつ大きくなっている。これは u の不等式 $b \le u \le b+j$ から b を引くことで

$$0 \le u-b \le j$$

となり、

$$0 \le j \le u$$

とは異なる下限が現れる事に由来する。この下限を組み込むために

$$\max(0,u-b) \le j \le c-1$$

とする。また u の不等式 $b \le u \le b+j$ には内側の総和記号の j があるため、このまま順序交換はできない。先程の例から u の上限は $b+c-1$ と分かるため

$$b \le u \le b+c-1 = n$$

である。つまり

$$\sum_{j=0}^{c-1}\sum_{u=b}^{b+j} f(j,u) = \sum_{u=b}^{b+c-1}\ \sum_{j=\max(0,u-b)}^{c-1} f(j,u)$$

である。確かめてみる。$u=b$ のとき $0 \le j \le c-1$ となるため $u=b$ のときの総和は $\sum_{j=0}^{c-1} f(j,b) = f(0,b)+f(1,b)+f(2,b)+\cdots+f(c-1,b)$ となる。$u=b+1$ のとき $1 \le j \le c-1$ となるため $u=b+1$ のときの総和は $\sum_{j=1}^{c-1} f(j,b+1) = f(1,b+1)+f(2,b+1)+\cdots+f(c-1,b+1)$ となる。外側の総和の上限の $u=b+c-1$ のとき $j=c-1$ となる。総和は $\sum_{j=\max(0,u-b)}^{c-1} f(j,b+c-1) = f(b+c-1,b+c-1)$ である。そのため

$$
\begin{aligned}
\sum_{u=b}^{b+c-1}\ \sum_{j=\max(0,u-b)}^{c-1} f(j,u) &= \sum_{j=0}^{c-1} f(j,b) + \sum_{j=1}^{c-1} f(j,b+1) + \cdots + \sum_{j=c-1}^{c-1} f(j,b+c-1) \\
&= \begin{array}{llll}
f(0,b)+ & f(1,b)+ & f(2,b)\ +\cdots & +f(c-1,b)+ \\
 & f(1,b+1)+ & f(2,b+1)\ +\cdots & +f(c-1,b+1)+ \\
 & & f(2,b+2)\ +\cdots & +f(c-1,b+2)+ \\
 & & & \ddots \\
 & & & +f(c-1,b+c-1)
\end{array}
\end{aligned}
$$

となる。こちらは上三角行列的だが、前者の列と後者の行を見比べると同一であることが分かる。このことから一致すると言える。故に

$$I_a(b,c)=\sum_{j=0}^{c-1}\sum_{u=b}^{b+j}f(j,u)=\sum_{u=b}^{b+c-1}\sum_{j=\max(0,u-b)}^{c-1}f(j,u)$$

が成り立つ。XXXXX 無限級数の順序交換は一般に一致しないが、有限級数の順序交換は一致する。但し、今回のように総和の範囲が変わるため注意が必要である。XXXXX 話を正規化したベータ関数に戻す。ここまでの議論を参考に書き換えると

$$\begin{aligned}I_a(b,c)&=\sum_{j=0}^{c-1}\sum_{u=b}^{b+j}(-1)^{b+j-u}\binom{n}{u}\binom{n-u}{b+j-u}a^{b+j}\\&=\sum_{u=b}^{b+c-1}\binom{n}{u}\sum_{j=\max(0,u-b)}^{c-1}(-1)^{b+j-u}\binom{n-u}{b+j-u}a^{b+j}\end{aligned}$$

となる。ここで $r=b+j-u$ とする。外側の総和の範囲から $0\leq u-b$ であるため r を内側の総和の引数とするとその下限は $\min(r)=b+\min(j)-u=b+u-b-u=0$ である。よって

$$\begin{aligned}I_a(b,c)&=\sum_{u=b}^{n}\binom{n}{u}\sum_{r=0}^{n-u}(-1)^r\binom{n-u}{r}a^{r+u}\\&=\sum_{u=b}^{n}\binom{n}{u}\left\{(1-a)^{n-u}\right\}a^u\\&=(1-a)^n\sum_{u=b}^{n}\binom{n}{u}\left(\frac{a}{1-a}\right)^u\end{aligned}$$

である。この式の定数に別のものを代入する。$a=1-p,\ b=t-k,\ c=k,\ n=t-1$ とすると

$$I_{1-p}(t-k,k)=p^{t-1}\sum_{u=t-k}^{t-1}\binom{t-1}{u}\left(\frac{1-p}{p}\right)^u$$

となり、$j=t-1-u$ とすると

$$\begin{aligned}I_{1-p}(t-k,k)&=p^{t-1}\sum_{j=k-1}^{0}\binom{t-1}{-j+t-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{j-t+1}\\&=\sum_{j=0}^{k-1}\binom{t-1}{j}(1-p)^{-j+t-1}p^{t-1+j-t+1}\\&=(1-p)^t\sum_{j=0}^{k-1}\binom{t-1}{j}\frac{p^j}{(1-p)^{j+1}}\end{aligned}$$

となる。これは負の二項分布の生存関数であるため、生存関数は正規化したベータ関数で表せる。

$$S(t)=I_{1-p}(t-k,k)$$

次は関係式

$$P(t=T)=S(x)-S(x+1)$$

より確率質量関数を求める。便宜上 $b = p/a$ とする。二項係数の公式 $\binom{t}{j} = \binom{t-1}{j} - \binom{t-1}{j-1}$ を用いると

$$
\begin{aligned}
P(t=T) &= S(t) - S(t+1) \\
&= a^{t-1}\sum_{j=0}^{k-1} b^j \binom{t-1}{j} - a^t \sum_{j=0}^{k-1} b^j \binom{x}{j} \\
&= a^{t-1}\left\{\sum_{j=0}^{k-1} b^j \binom{t-1}{j} - a\sum_{j=0}^{k-1} b^j \binom{t}{j}\right\} \\
&= a^{t-1}\left\{\sum_{j=0}^{k-1} b^j \binom{t-1}{j} - a\sum_{j=0}^{k-1} b^j \left(\binom{x-1}{j} + \binom{t-1}{j-1}\right)\right\} \\
&= a^{t-1}\left\{\sum_{j=0}^{k-1} b^j \binom{t-1}{j} - a\sum_{j=0}^{k-1} b^j \binom{t-1}{j} - a\left(0 + \sum_{j=1}^{k-1} b^j \binom{t-1}{j-1}\right)\right\} \\
&= a^{t-1}\left\{(1-a)\sum_{j=0}^{k-1} b^j \binom{t-1}{j} - \sum_{j=0}^{k-2} ab^{j+1} \binom{t-1}{j}\right\} \\
&= a^{t-1}p\left\{\sum_{j=0}^{k-1} b^j \binom{t-1}{j} - \sum_{j=0}^{k-2} b^j \binom{t-1}{j}\right\} \\
&= a^{t-1}pb^{k-1}\binom{t-1}{k-1} \\
&= (1-p)^{t-k}p^k\binom{t-1}{k-1}
\end{aligned}
$$

となる。$k=1$ のとき

$$P(t=T) = (1-p)^{t-1}p$$

となる。これは幾何分布の確率質量関数である。また関係式を $S(t)$ で割ると

$$\frac{P(t)}{S(t)} = 1 - \frac{S(t+1)}{S(t)}$$

となり、この右辺は故障率であるため

$$r(t) = \frac{P(t)}{S(t)} = \frac{(1-p)^{t-k}p^k\binom{t-1}{k-1}}{(1-p)^t\sum_{j=0}^{k-1}\binom{t-1}{j}\frac{p^j}{(1-p)^{j+1}}}$$

である。期待値を求める。公式より

$$
\begin{aligned}
E[T] &= \sum_{t=1}^{\infty} S(t) \\
&= \sum_{t=1}^{\infty}(1-p)^t \sum_{j=0}^{k-1} \frac{p^j}{(1-p)^{j+1}}\binom{t-1}{j} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{p^j}{(1-p)^{j+1}} \sum_{t=1}^{\infty}(1-p)^t \binom{t-1}{j}
\end{aligned}
$$

となり、二番目の総和は、二項係数の零になる値をを用いた書き換え

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{\infty}\binom{t-1}{j} &= \binom{0}{j}+\binom{1}{j}+\cdots+\binom{j-1}{j}+\binom{j}{j}+\cdots \\
&= 0+0+\cdots+0+\binom{j}{j}+\cdots \\
&= \sum_{t=j+1}^{\infty}\binom{t-1}{j} \\
&= \sum_{t=j+1}^{\infty}\binom{t-1-j+j}{j}
\end{aligned}
$$

より

$$
\sum_{t=1}^{\infty}(1-p)^t\binom{t-1}{j} = \sum_{t=j+1}^{\infty}(1-p)^t\binom{t-1-j+j}{j}
$$

となる。ここで $n=t-1-j$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{\infty}(1-p)^t\binom{t-1}{j} &= \sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^{n+j+1}\binom{n+j}{j} \\
&= (1-p)^{j+1}\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^n\binom{n+j}{n}
\end{aligned}
$$

となる。この総和の中身を計算する。$j=i-1$ とすると補記の負の二項展開より

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^n\binom{n+j}{n} &= \sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^n\binom{i+n-1}{n} \\
&= \{1-(1-p)\}^{-i} \\
&= p^{-j-1}
\end{aligned}
$$

となる。つまり二番目の総和は

$$
\sum_{t=1}^{\infty}(1-p)^t\binom{t-1}{j} = (1-p)^{j+1}p^{-j-1} = \frac{(1-p)^{j+1}}{p^{j+1}}
$$

となるため期待値は

$$
\begin{aligned}
E[T] &= \sum_{j=0}^{k-1}\frac{p^j}{(1-p)^{j+1}}\frac{(1-p)^{j+1}}{p^{j+1}} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{p} \\
&= \frac{k}{p}
\end{aligned}
$$

となる。